A INFLUÊNCIA DE IMBRICAÇÕES ENTRE CAMPOS CONCEITUAIS NA RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES ENVOLVENDO FÓRMULAS DE ÁREA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

TELES, Rosinalda Aurora de Melo – UFPE – rosinaldateles@yahoo.com.br
GT-19: Educação Matemática

INTRODUÇÃO:

Com o termo *"imbricações"* caracterizamos um tipo de relação em que os campos conceituais se sobrepõem mutuamente, se articulam e a partir dessa "interconexão dinâmica" são gerados novos significados para os conteúdos matemáticos em foco. Procuramos pensar nas imbricações entre campos conceituais, articulando as dimensões epistemológica, cognitiva e didática. O tratamento de situações nas quais estão envolvidas fortes imbricações exige que os sujeitos naveguem de um campo conceitual para outros e que articulem seus conhecimentos para tratar de maneira pertinente os problemas postos.

No intuito de investigar as imbricações entre os campos conceituais das grandezas geométricas e suas medidas, da geometria, da álgebra, funcional e numérico, na Matemática Escolar, por meio da análise de situações envolvendo as fórmulas de área de figuras planas, desenvolvemos uma pesquisa que consistiu em estudos teóricos e empíricos.

Dois estudos relativos à análise de livros didáticos para o ensino fundamental e médio, assim como de exames de vestibular, permitiram caracterizar as abordagens propostas para a construção do significado das fórmulas de área do retângulo, do quadrado, do paralelogramo e do triângulo e identificar os tipos de usos dessas fórmulas propostos em tais documentos. Estes estudos subsidiaram a elaboração e análise teórica de 5 (cinco) testes diagnósticos complementares, relativos aos vários tipos de uso das fórmulas de área destas figuras. Os testes diagnósticos foram submetidos a 259 alunos de 2ª série do Ensino Médio, de cinco escolas de uma Região Metropolitana brasileira, com perfis variados[1].

Neste artigo discutimos alguns resultados relativos às imbricações entre os campos evidenciados na análise destes testes. Os dados quantitativos possibilitaram a

---

[1] Em cada uma das cinco escolas foram aplicados em média 50 testes, sendo 10 de cada tipo, ou seja, todos os testes foram aplicados em todas as escolas.

identificação de três indícios relativos às imbricações entre os campos conceituais: a ausência de resposta em determinadas questões que na análise teórica apontavam imbricações entre campos conceituais; o percentual de erros nas questões de otimização e a diversidade de procedimentos mobilizados em determinadas questões.

Este texto ajuda a refletir sobre como as imbricações entre os campos conceituais das grandezas geométricas, da geometria, dos números, da álgebra e das funções, podem influenciar em situações envolvendo fórmulas de área de figuras geométricas planas. Apresentamos uma síntese da análise teórica de cinco das questões utilizadas no teste diagnóstico e discutimos a partir dos resultados obtidos na aplicação dos testes a influência das imbricações nestas situações[2].

1. A ELABORAÇÃO DOS TESTES E A IDENTIFICAÇÃO DE IMBRICAÇÕES

Os testes tiveram como objetivo caracterizar os conhecimentos oriundos dos diversos campos conceituais subjacentes aos procedimentos de resolução de situações envolvendo fórmula de área do retângulo, do paralelogramo e do triângulo e mapear, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990), situações, invariantes operatórios e representações simbólicas referentes à fórmula de área destas figuras.

A elaboração dos testes correspondeu à culminância de vários estudos teóricos e empíricos sobre a abordagem da área de uma figura geométrica plana enquanto grandeza (DOUADY & PERRIN-GLORIAN,1989).

Para construir os testes realizamos uma análise teórica, que é característica dos trabalhos em Didática da Matemática e tem seu conteúdo determinado, conforme Henry (2006), pelo objeto de estudo, pelas razões pelas quais ela é conduzida e pelo público ao qual se destina.

Para Henry (2006) uma análise teórica é um conjunto de estudos que contribuem para o conhecimento do saber em jogo numa situação didática (análise epistemológica); para a descrição de seu funcionamento na evolução de uma situação (análise didática) e contribui também para o estudo dos comportamentos possíveis dos alunos em sua gestão (análise pedagógica).

[2] Chamamos "*situação*" um exercício, questão ou atividade isoladas, e não necessariamente uma seqüência de etapas como defende a teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau.

Em nosso trabalho a análise teórica se apóia em elementos teóricos identificados em etapas anteriores da nossa pesquisa, relacionados às fórmulas de área de figuras geométricas tomando como foco imbricações entre campos conceituais. A partir destes elementos identificamos variáveis didáticas, seus possíveis valores; justificamos escolhas, tomando como foco a Teoria dos Campos Conceituais, antecipamos respostas corretas esperadas, bem como procedimentos corretos e errôneos esperados. A caracterização das questões dos testes diagnósticos, como já dissemos, pode servir como ponto de partida para pesquisas posteriores que queiram elaborar e testar situações didáticas relacionadas a este tema.

Elegemos doze variáveis relacionadas ao diversos campos conceituais. Ao campo das grandezas relaciona-se o tipo de uso das fórmulas e as unidades de medida. Ao campo geométrico: tipos de figuras; presença da figura; posição da figura. Relacionados ao campo numérico: dados numéricos; domínio numérico dos dados e dos resultados. Ao campo algébrico e ao funcional: a natureza dos dados e as operações em jogo. Outras variáveis como contexto; caráter típico ou atípico da questão e tipo de papel também foram consideradas. Os valores que as variáveis assumem em cada questão foram escolhidos tomando como base a revisão de literatura e os aspectos que nos propomos a analisar em cada questão.

Foram elaborados cinco testes[3], cada um com quatro questões[4], sendo a primeira questão idêntica para todos os testes e as outras três seguindo uma lógica relacionada às imbricações entre os campos conceituais, refletida no tipo de uso da fórmula em cada questão. Ou seja, temos uma questão fixa e 15 outras que foram distribuídas em cinco tipos de testes. As fórmulas nunca são fornecidas na questão.

. IMBRICAÇÕES ENTRE OS CAMPOS DAS GRANDEZAS, DA ÁLGEBRA E DA GEOMETRIA NA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO Q3-T3

A Questão 3 do teste 3 (Q3 – T3), extraída de um livro didático, propõe o cálculo das dimensões do retângulo em função do perímetro e da área. Coloca em jogo as seguintes variáveis e seus respectivos valores: uso da fórmula para calcular; tipo de figura - retângulo; ausência da figura no enunciado; Domínio numérico - números naturais; Unidade de comprimento – cm e de área cm^2.

[3] No texto identificamos por T1, T2, T3, T4 e T5 respectivamente o teste 1, teste 2, etc. As questões são indicadas por exemplo como Q4 – T5 para questão 4 do teste 5.
[4] As questões são indicadas, por exemplo, como Q4 – T5 para questão 4 do teste 5.

Uma região retangular tem 42 cm de perímetro e 104 cm^2 de área. Quais são as dimensões dessa região retangular?

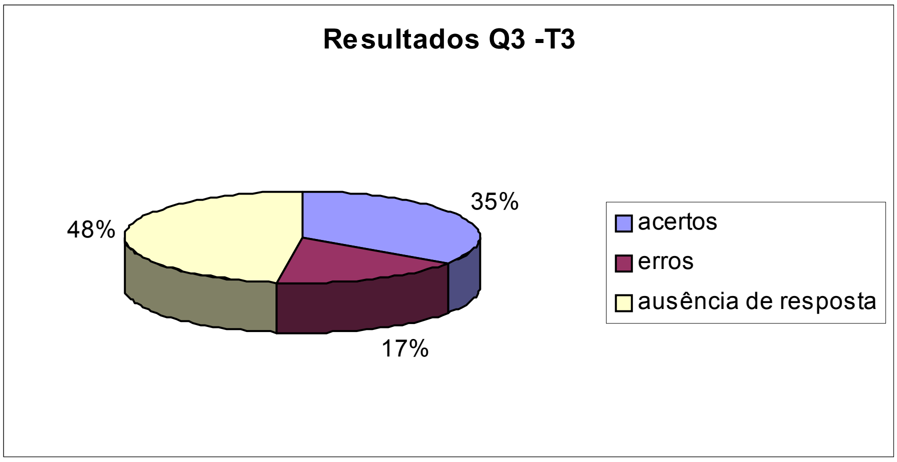
Dante, Luiz Roberto. Tudo é Matemática. Editora Ática: São Paulo, 2002. 8ª série.

Neste problema o campo algébrico intervém como uma ferramenta a serviço da resolução de problemas (GARCIA, 1997), possibilitando a formulação e a resolução desta questão por meio de equações através de regras para manipulação de símbolos algébricos.

Porém, para escrever a expressão algébrica que poderá conduzir à resposta correta, é preciso também mobilizar conhecimentos do campo das grandezas geométricas: os conceitos de área e perímetro e as relações que podem ser estabelecidas entre eles e ainda conhecimentos do campo geométrico: propriedades do retângulo.

Verificamos que para resolver esta questão os alunos mobilizaram conhecimentos dos vários campos conceituais, porém, houve bastante ausência de respostas (quase 50% dos alunos testados) evidenciada na análise quantitativa. Esta ausência pode ser pelo menos parcialmente explicada pela dificuldade de mobilizar conhecimentos importantes dos campos conceituais: das grandezas, da geometria e o da álgebra. O gráfico abaixo ilustra, no universo de 46 alunos testados a quantidade de acertos, erros e ausência de resposta:

GRÁFICO 1. Resultados da Questão Q3 –T3

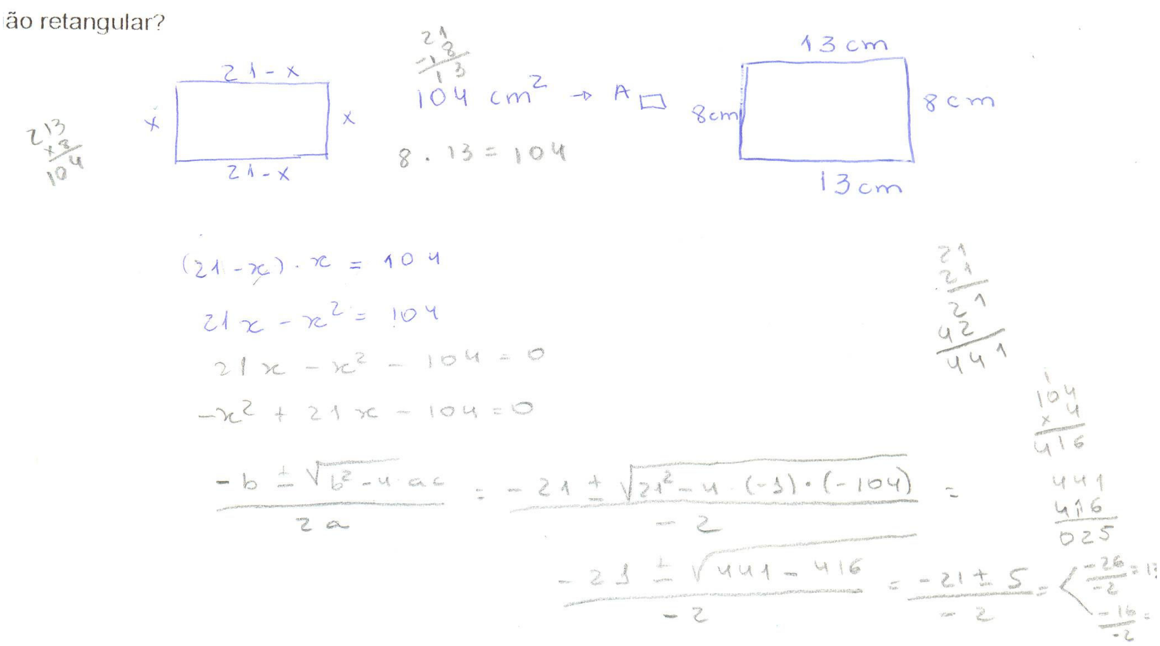


Representar simbolicamente as informações oferecidas no enunciado subtende imbricações entre o campo conceitual das grandezas, da geometria e da álgebra. O aluno precisa colocar em ação conhecimentos referentes aos conceitos de área e perímetro de um retângulo e também representar simbolicamente a relação entre estes dois conceitos. Ao traçar a figura para ilustrar a região retangular mobiliza propriedades do retângulo.

Precisa modelar utilizando representação algébrica para os lados da figura e escrever a expressão algébrica resultante. Para o perímetro, precisa representar simbolicamente a adição de 4 lados, iguais dois a dois compondo 42. E a área como o produto de um dos lados tomado como base pela altura correspondente totalizando 104. Em nossa análise, 42% dos alunos que responderam à questão utilizaram a representação simbólica da figura para ajudar o raciocínio ou para confirmar os valores encontrados por tentativa.

O protocolo abaixo apresenta uma solução correta para questão. Nele o aluno mobiliza conhecimentos dos vários campos conceituais, ilustrando nossa hipótese que a ausência de resposta em determinadas questões relaciona-se a necessidade de conhecimentos variados, ou seja, as imbricações entre campos conceituais constituem-se uma explicação possível para índices elevados de ausência de resposta.

Figura 1. Prot. 1. Q3T3A$_1$



Este aluno mobiliza conhecimentos do campo geométrico para fazer articulações entre as propriedades e a maneira de organizar o desenho do retângulo. Mobiliza também conhecimentos do campo das grandezas relacionados aos conceitos de área e perímetro, ao mesmo tempo em que usa o campo algébrico para modelar o problema escrevendo simbolicamente as dimensões do retângulo.

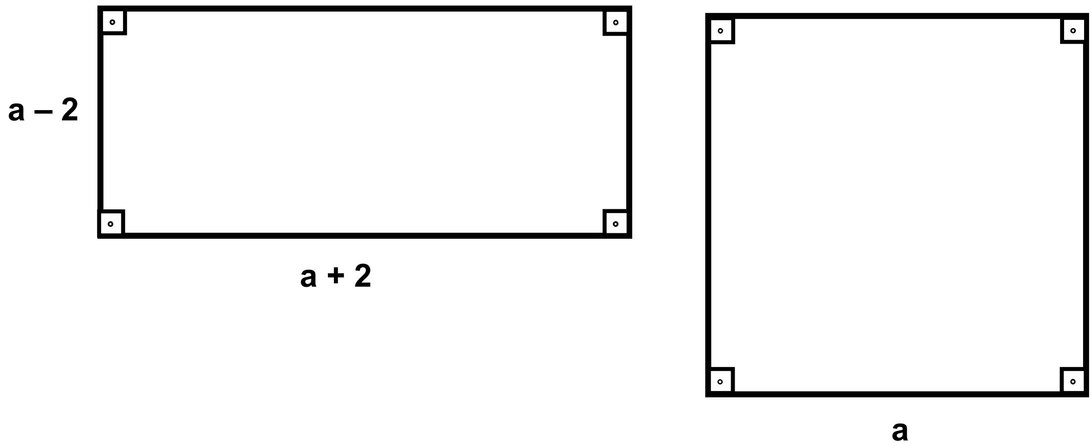
1.3. IMBRICAÇÕES ENTRE OS CAMPOS DAS GRANDEZAS, DA ÁLGEBRA E NUMÉRICO NA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO Q3-T5

A Questão 3 do teste 5 (Q3-T5) , baseada numa questão de um livro didático[5], foca as seguintes variáveis e seus respectivos valores: uso da fórmula para comparar. Com relação à natureza, os dados são letras que assumem o papel de variáveis; as figuras são retângulo e quadrado e estão presentes no enunciado.

Pressupõe a comparação das áreas de um retângulo e de um quadrado através da escrita e manipulação de uma expressão algébrica.

Mobiliza imbricações entre os campos conceituais das grandezas, da geometria, da álgebra e numérico:

As dimensões do retângulo (à esquerda) e do quadrado (à direita) são dadas pelas expressões indicadas, nas quais a representa um número maior do que 2 (a > 2):



a) Qual das duas figuras tem maior área? Por quê?

O contexto deste problema é intramatemático, mais especificamente da "geometria". Discute-se a comparação das áreas de duas figuras geométricas planas: o quadrado e o retângulo, tendo implícita a possibilidade de duas figuras de formas diferentes possuírem perímetros iguais e áreas diferentes. A representação simbólica **a,** neste caso, desempenha o papel de variável, pois a comparação das áreas se dará em função da comparação das expressões algébricas resultantes da mobilização das fórmulas da área do retângulo e do quadrado: $(a – 2) (a + 2) < a^2$.

A resolução desta questão envolve diversos aspectos relacionados aos campos conceituais. Do campo conceitual geométrico a leitura e a interpretação das figuras

[5] SMOLE, Kátia Stocco e DINIZ, Maria Ignez. *Matemática Ensino Médio*. 3ª Edição Reformulada. São Paulo: Editora Saraiva, 2003. Volume 1, pág. 147.

geométricas: retângulo e quadrado e suas propriedades; do campo conceitual das grandezas, mobilização das fórmulas de área do retângulo e do quadrado; do campo conceitual algébrico a modelização e manipulação simbólica das expressões geradas pela escrita das fórmulas e do campo conceitual funcional – o papel da letra como variável, caracterizado inclusive pela ausência de unidades de medida na questão, que implica em aceitar que para qualquer valor (restrito a um domínio) e para qualquer unidade vale a relação estabelecida.

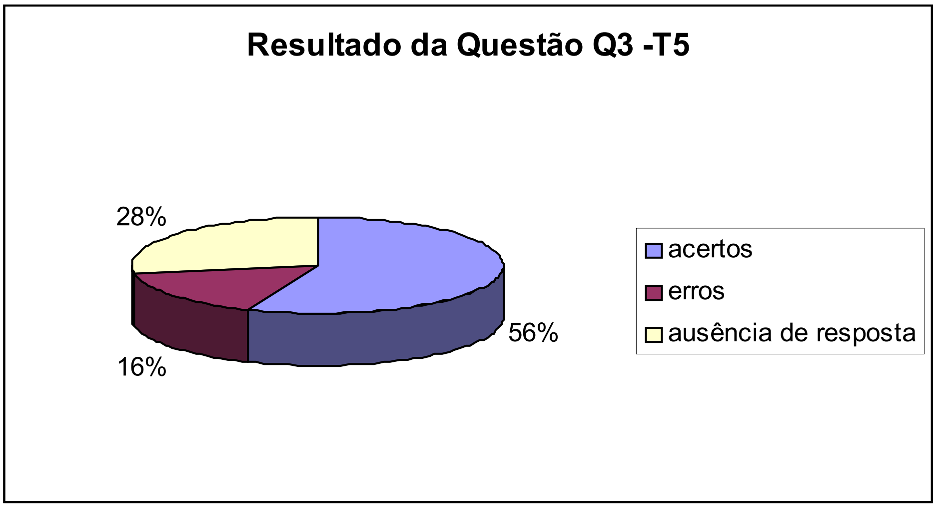
Inicialmente o aluno se depara com dimensões representadas por variáveis e precisa exprimir a área do retângulo e do quadrado em função destas variáveis. Conforme Germi (1997), exprimir uma grandeza geométrica em função de outra, envolve uma distinção entre fórmula de base e fórmula algébrica. A partir da figura geométrica e da fórmula decorrente o aluno constrói a "fórmula de base", compreendida como a fórmula resultante da designação que o aluno deu às grandezas. Da fórmula de base o aluno constrói a "fórmula algébrica", que é a fórmula resultante da substituição dos elementos da fórmula pelos correspondentes algébricos. Assim para área do retângulo escreve: $A_r = (a-2)(a+2)$ e para área do quadrado: $A_q = a^2$. O passo seguinte consiste em calcular o produto:

$$
\begin{aligned}
A_r &= (a-2)(a+2) \\
A_r &= a(a+2) - 2(a+2) \\
A_r &= a^2 + 2a - 2a - 4 \\
A_r &= a^2 - 4
\end{aligned}
$$

Nesta questão, as imbricações podem ser vistas não só como fator de entrave, mas como abertura de possibilidade de resolução evidenciada na variedade de tipos de procedimento de resolução. Esta questão (Q3 –T5) obteve maior índice de acerto (56%) nos testes.

O gráfico abaixo ilustra no universo de 50 alunos testados a quantidade de acertos, erros e ausência de resposta:

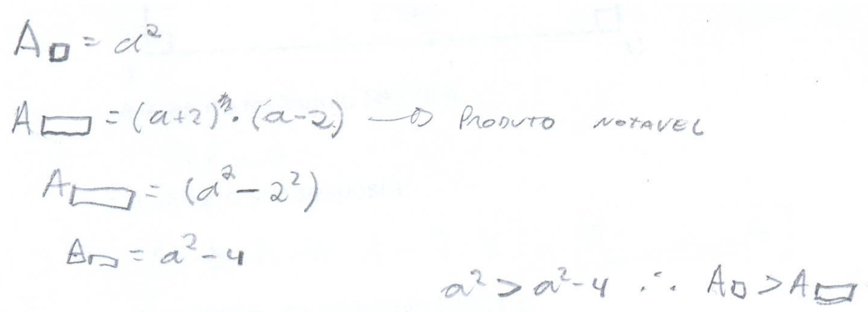
GRÁFICO 2. – RESULTADO DA QUESTÃO Q3 –T5



As imbricações puderam ser identificadas nas justificativas apresentadas para "*qual das duas figuras tem maior área*":

- Justificativa algébrica – baseada na expressão algébrica. No primeiro protocolo o aluno representa simbolicamente as áreas das figuras; resolve a expressão correspondente, compara-as e explicita simbolicamente que se a primeira expressão é maior do que a outra então a área da figura à qual corresponde aquela expressão é maior do que a outra área.

Figura 2. Prot. 2 - Q3T5G$_1$



No segundo protocolo o aluno faz o mesmo procedimento, só que justifica utilizando linguagem natural.

FIG. 3 – Prot. 3 - Q3T5D$_5$

$A_{nt} = (a-2).(a+2)$
$A_{nt} = a^2 + 2a - 2a - 4$
$A_{nt} = a^2 - 4$

$A_q = a \cdot a$
$A_q = a^2$

a

O quadrado tem maior área, pois a^2 é maior que a^2-4!

Já no protocolo abaixo o aluno apresenta uma justificativa relacionada ao papel da letra enquanto variável.

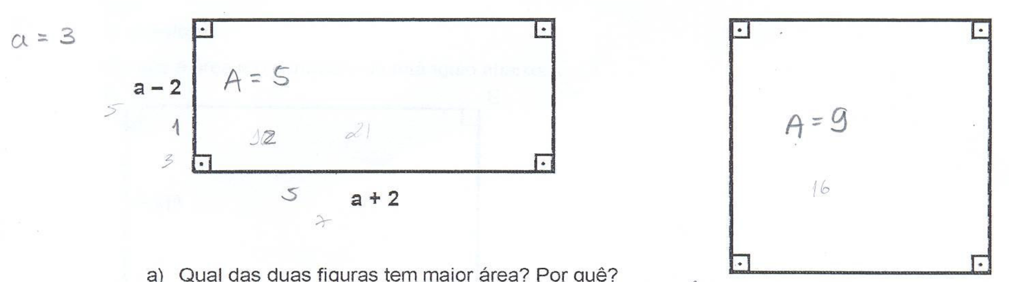
FIG..4 – Prot. 4 - Q3T5D$_1$

a

O quadrado tem a maior área, pois independentemente do número que assuma o valor de "a", sua área vai ser sempre "a^2", e a do retângulo sempre será menor que este valor, pois um de seus lados é "$a-2$", impossibilitando de a área se tornar maior que "a^2".

- Justificativa numérica – baseada na atribuição de valores à variável **a,** como ilustra o protocolo abaixo.

FIG .5 – Prot. 5 - Q3T5E$_1$,



a) Qual das duas figuras tem maior área? Por quê?

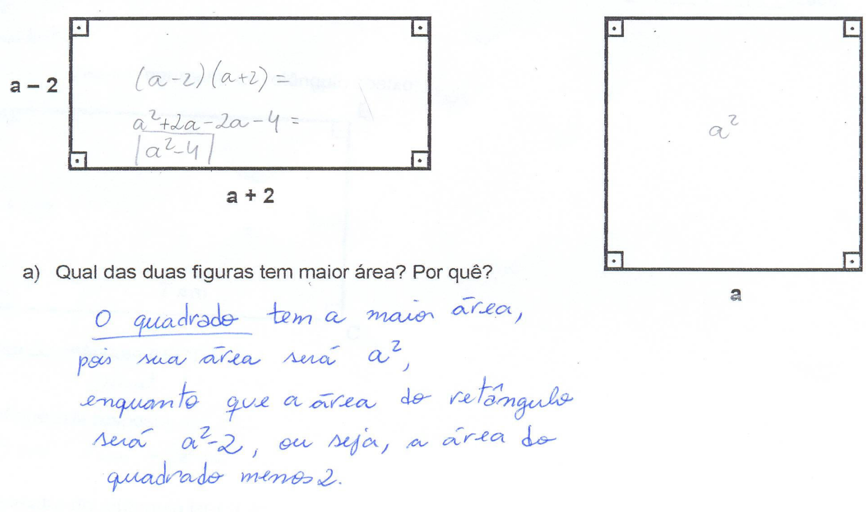
O quadrado, porque pode-se perceber isso atribuindo valores a a.

a

- E a justificativa relacionada às grandezas – baseada explicitamente nas áreas, ou relacionadas ao comprimento dos lados.

No protocolo abaixo o significado das expressões algébricas a^2 e $a^2 - 4$ do ponto de vista das grandezas é explicitado pelo aluno, ou seja, referencial semântico da álgebra é resgatado por eles.

FIG. 6. – Prot. 6 - Q3T5B$_2$



Assim, os vários procedimentos e justificativas apresentados pelos alunos nesta questão, evidenciam um modo de pensar as imbricações entre os campos conceituais: possibilidade de mobilizar variadas estratégias de resolução.

2. IMBRICAÇÕES NOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Em nosso estudo sobre classes de problemas que envolvem fórmulas de área nos livros didáticos, identificamos a predominância de um tipo de uso da fórmula para otimizar, por isso, na quarta questão, de todos os testes, apresentamos dois tipos de problemas que chamamos "*problema de otimização*" (com e sem figura) e problema envolvendo operações entre grandezas[6] (com e sem figura). O primeiro, "*problema de otimização*", predomina no Ensino Médio e no 2º ano do 4º ciclo do Ensino Fundamental. A principal tarefa desta classe de problemas é a determinação da maior área possível em função da área e/ou de um perímetro fixo. Nela mobiliza-se o aspecto funcional ao descrever o valor e a função da área com relação a x. Refere-se geralmente a "**aplicações *do conceito de máximo e mínimos no estudo das funções*"**. Numa situação de otimização intervém o caráter de "variável" de **A** (área), as letras envolvidas evoluem passando de um status de número desconhecido fixado (incógnita) para o status de número desconhecido, mas que varia em função dos elementos da figura (GERMI, 1997).

O campo conceitual das grandezas aparece com as relações entre área e perímetro. Dentre os aportes teóricos para análise das questões de otimização,

---

[6] Este tipo de problema trataremos em outro artigo.

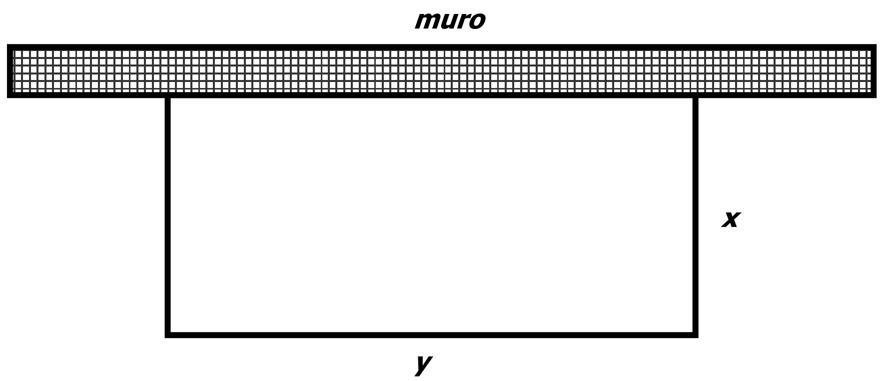
destacamos os estudos de Douady & Perrin-Glorian (1984, 1985, 1989) que encontraram como resultado de sua pesquisa que os alunos costumam associar modificações de área a alterações de perímetro e vice-versa, para figuras de mesma forma. Baltar (1996) também identifica como resultado de sua pesquisa a idéia de que área e perímetro de um retângulo variam num mesmo sentido.

A análise das questões de otimização mostrou que os erros cometidos pelos alunos são oriundos dos vários campos conceituais. Identificamos erros relacionados à confusão entre área e perímetro pertencente ao campo das grandezas; erro que reflete dificuldade na interpretação de um modelo real por meio de uma figura geométrica, relacionado ao campo geométrico; erros na modelagem e na resolução de expressões algébricas ligado ao campo algébrico e erro que corresponde à não interpretação da letra como uma variável relacionado ao campo funcional.

2.1. Questão 4 do teste 1 (Q4 –T1):

Esta questão chamaremos *"Metros de Tela"*. Coloca em jogo as seguintes variáveis e seus respectivos valores: uso da fórmula para otimizar; o tipo da figura é o retângulo; há presença da figura no enunciado; o contexto é social, relacionado à jardinagem; o domínio numérico dos dados e dos resultados é o dos números naturais; a unidade de comprimento é o metro

Dona Rosa adora flores e deseja fazer um canteiro retangular aproveitando um muro existente em seu terreno. Ela ainda não sabe quais serão as dimensões do canteiro, mas quer aproveitar todos os 20 metros de tela que tem para cercá-lo.



Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão o comprimento e a largura nesse caso?

Nesta questão o aluno é confrontado com uma situação em que figuras com perímetros iguais apresentam áreas distintas. O conhecimento matemático é mobilizado numa situação de jardinagem. Ao canteiro é atribuído o modelo matemático do retângulo. A figura geométrica, neste caso, modeliza o que necessariamente pode não ser retangular e ainda por cima todas as dimensões indicadas implícita ou explicitamente são inteiras.

A principal solicitação do problema é distribuir os 20 metros de tela em 3 partes, sendo 2 iguais e uma diferente, isto porque, a figura é um retângulo, mas os 20 metros de tela formam uma linha poligonal aberta. Uma das propriedades do retângulo refere-se à medida dos lados paralelos serem iguais.

O domínio estritamente natural para as medidas apresentadas no problema favorece o procedimento numérico, ou seja, ir desenhando retângulos, fazendo tentativas até achar o retângulo de maior área, o que é facilitado pelo fato do número 20 possuir muitos divisores.

Utiliza o conceito de variável. Explorando a idéia que o **x** e o **y** variam dentro de um certo domínio. Vários tipos de representações podem ser utilizados: tabela, gráfico, expressão algébrica, a relação estabelecida é linear.

Dentre os erros identificados nesta questão, destacamos:

i) ERRO RELACIONADO AO CAMPO DAS GRANDEZAS

- **Erros relacionados à confusão entre área e perímetro** - Para 6 alunos área e perímetro são iguais ou mantêm a mesma proporção ou ainda a maior área possível é 20, na questão 4 do teste 1 (Metros de Tela).

No primeiro protocolo o aluno explicita que a área e o perímetro do canteiro precisam ser iguais, mobilizando um falso teorema-em-ação identificado em várias pesquisas anteriores. A comparação que o aluno faz evidencia uma concepção numérica. E reforça a necessidade de trabalhar a dissociação área e perímetro na abordagem do conceito de área.

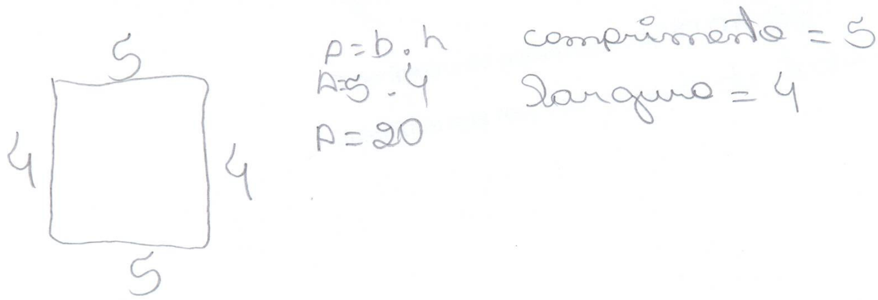
FIG. 7. Prot. 8 -. Q4T1F$_1$

Nesse caso medirão 5 cm cada, pois a área será 25cm², maior área possível com os 20 metros de tela

"medirá 4 cm, pois se medir mais que isso, a área será maior que o perímetro."

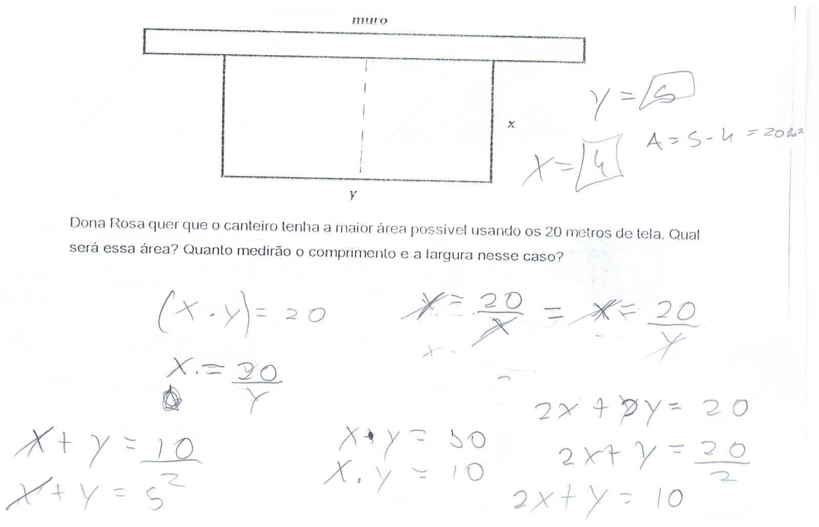
No protocolo abaixo, também explicita sua concepção, só que desta vez mobilizando a fórmula da área do retângulo para justificar sua resposta.

FIG. 8. Prot. 9 - Q4T1G$_2$



Neste outro protocolo, a explicitação aparece via representação algébrica. O aluno não atribui valores particulares para as dimensões do retângulo, dando indícios da mobilização da noção de variável, mas toma como ponto de partida que x. y é igual a 20, ou seja, a área é igual a medida da tela que dispõe para cercar o canteiro.

FIG. 9 – Prot. 10 - Q4T1D$_4$

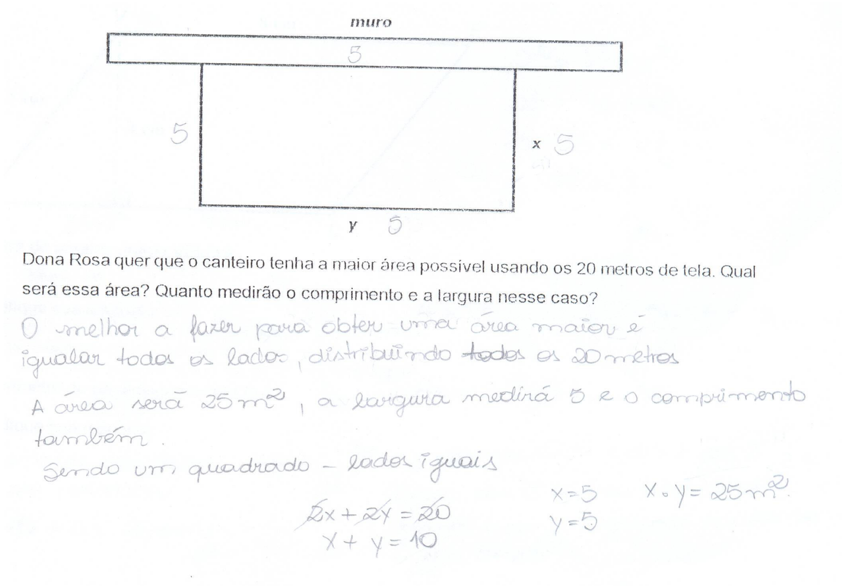


ii) ERRO RELACIONADO AO CAMPO ALGÉBRICO –

– Erro na modelagem da questão

Diante da dificuldade de passar da linguagem natural para linguagem simbólica que é uma das etapas para resolução de um problema algébrico (Da Rocha Falcão, 1997), ou seja, modelar a questão o aluno prefere um procedimento numérico caracterizado pela tentativa. Um dos aspectos que dificulta a modelagem é esquecimento do muro. O protocolo abaixo ilustra esta dificuldade.

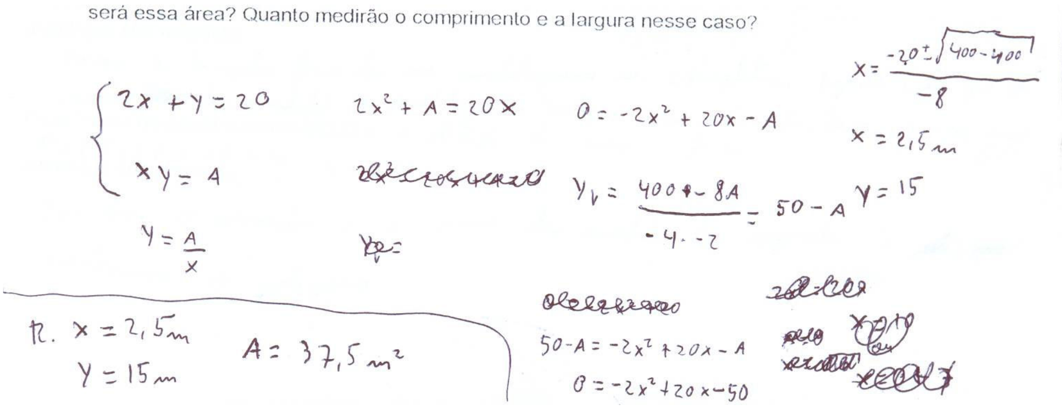
FIG.10 –Prot. 11 - Q4T1B_5



- **Erro de manipulação algébrica –**

O protocolo abaixo evidencia como um erro numa das etapas para resolução de um problema algébrico interfere na obtenção de soluções verdadeiras para problemas envolvendo fórmulas de área e reforça a importância do estudo das imbricações entre campos conceituais. O aluno modela corretamente o problema, demonstra domínio nas operações com as letras, mas um erro de sintaxe prejudicou seu resultado.

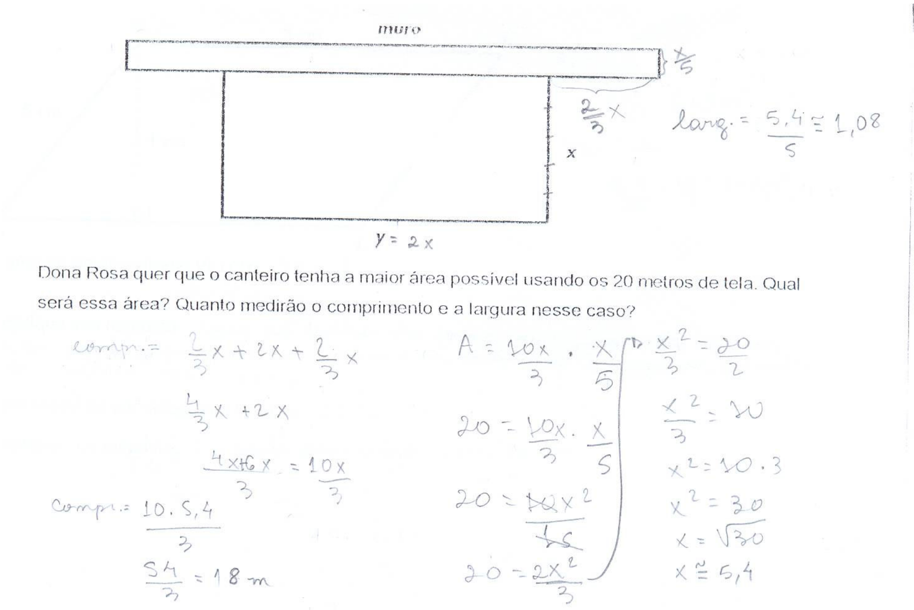
FIG. 11. Prot. 12 - Q4T1G$_1$ – .



iii) ERRO RELACIONADO AO CAMPO FUNCIONAL –

No protocolo abaixo o aluno ao interpretar a figura considera o muro como um retângulo do qual se precisa calcular a área também, para isto fixa uma unidade para x, ou seja, desconsidera o caráter variável da letra. O desenho é apenas uma representação do real, possuindo várias possibilidades de composições para o x e para o y.

FIG. 12. Prot. 13 - Q4T1C$_5$.



Como observamos no protocolo acima, o aluno exprime o valor de x e y incorporando a "área" do muro (inclusive mobiliza corretamente a fórmula da área do retângulo). Não interpreta corretamente o problema, inclusive confundindo área e perímetro, ou seja, num mesmo procedimento de resolução é possível identificar características dos vários campos conceituais, evidenciando o papel das imbricações como entrave para resolução de determinadas situações.

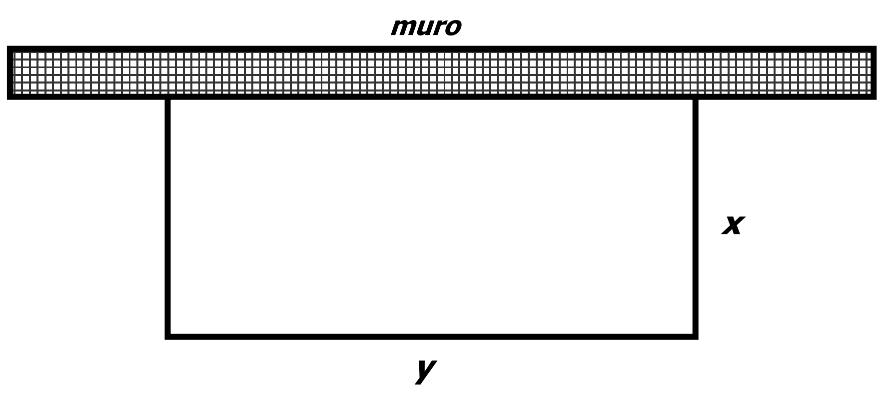
2.2. Questão 4 do teste 4, (Q4 – T4):

Este outro problema de otimização constitui-se uma versão do problema anterior que coloca em jogo outras variáveis. Neste problema buscamos indicar, através dos itens que precisa responder os passos para que o aluno calcule a área máxima produzida a partir de um perímetro fixo. Mobilizamos várias representações simbólicas: a representação funcional, ou seja, exprimir uma grandeza geométrica em função de outra, que envolve uma distinção entre o que Germi (1997) chama de fórmula de base e fórmula algébrica.

Nossos estudos preliminares indicaram que nos problemas de otimização, fórmula de base é a fórmula que expressa a relação entre os comprimentos dos lados e a área do retângulo; fórmula algébrica seria a fórmula de base com os elementos substituídos pelas variáveis. Numa situação de otimização intervém o caráter de 'variável" de A (área), as letras envolvidas evoluem passando de um status de número desconhecido fixado (incógnita) para o status de número desconhecido, mas que varia em função dos elementos da figura (GERMI, 1997).

Por outro lado, a utilização de tabelas e gráficos, obriga a considerar as letras como números desconhecidos que não são fixos (GERMI, 1997). Assim, um dos objetivos nesta questão, que interessa a nossa pesquisa sobre imbricações, é identificar se o aluno compreende a letra como variável.

Dona Rosa adora flores e deseja fazer um canteiro retangular aproveitando um muro existente em seu terreno, como indica a figura abaixo. As dimensões do canteiro podem variar, desde que os 20 metros de tela que possui sejam utilizados.



a) Expresse y em função de x.

b) Determine a área A desse canteiro em função de x.

c) Complete a tabela abaixo com alguns valores possíveis de x, de y e de A.

x												
y												
A												

d) Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão x e y, nesse caso.

No **item a** o aluno precisa expressar y em função de x, ou seja, escrever uma relação funcional que envolve, entre outros aspectos, no campo das grandezas a mobilização do conceito de área e perímetro, no campo algébrico a escrita de uma expressão algébrica.

Para determinar a área **A** desse canteiro em função de x, no **item b**, o aluno precisa mobilizar conhecimentos relativos à fórmula da área do retângulo (b x h); relacionar base e altura comprimento e largura do retângulo.

Completar a tabela com alguns valores possíveis de x e de y, no **item c**, envolve entre outras coisas, romper com o domínio estritamente natural, já que propomos mais espaços a preencher do que as alternativas inteiras possíveis para a questão.

No item d, o aluno é solicitado a identificar os valores de x e y para que o canteiro tenha a maior área possível.

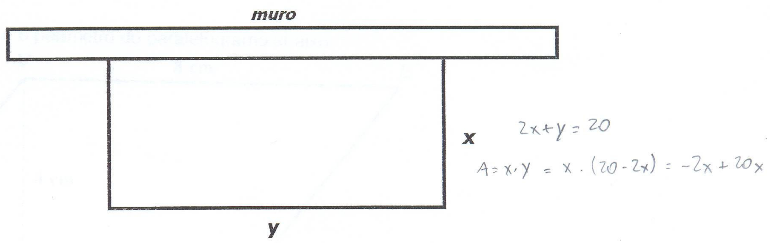
Um dos procedimentos possíveis para determinar o canteiro de maior área por tentativas, consiste em desenhar retângulos com as várias possibilidades de distribuição dos metros de tela.

Quando fixamos um perímetro e queremos calcular a maior área possível do retângulo construído com este perímetro, utilizamos a idéia de máximos e mínimos de uma função ou mobilizamos um conhecimento do campo geométrico referente à propriedade que fixando um perímetro o retângulo de maior área possível é um quadrado.

Sessenta alunos responderam o teste 4, destes apenas 27 (45%) responderam total ou parcialmente a questão 4 e os 55% (33 alunos) deixaram totalmente em "branco".

Dentre as respostas corretas obtidas para a área máxima destacamos o protocolo abaixo, onde apesar do aluno errar na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração, gerando uma expressão errada para A em função de x, acerta a medida da maior área, pois o procedimento escolhido (calcular o ponto máximo da função independe do expoente de x).

FIG. 13 – Prot. 14 - Q4T4A$_1$



a) Expresse y em função de x. $\boxed{y = 20 - 2x}$
b) Determine a área A desse canteiro em função de x. $\boxed{A = -2x + 20x}$
c) Complete a tabela abaixo com alguns valores possíveis de x, de y e de A.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1,5	5,5	4,5
y	18	16	14	12	10	8	6	4	2	17	9	11
A	18	32	42	48	50	48	42	32	18	25,5	49,5	49,5

d) Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão x e y, nesse caso.

$A = -2x + 20x$

$\frac{-b}{2a} = \frac{-20}{-4} = 5$ $\boxed{x = 5m}$ $2x + y = 20$ $\boxed{y = 10m}$ $\boxed{A = 50\ m^2}$

$17 \times 1,5 = 25,5$ $5,5 \times 9 = 49,5$ $4,5 \times 11 = 49,5$

Os itens a e b exigem um procedimento algébrico, ou seja, modelar uma situação tomando como referencial conhecimento do campo das grandezas – área e perímetro – a ausência de respostas e a quantidade de respostas erradas sinalizam dificuldades relacionadas a esta tarefa. Dentre os erros na escrita álgebra destacamos a mobilização da relação errônea entre as dimensões do canteiro gerando a expressão $2x + 2y = 20$, que corresponde a equação equivalente $y = 10 - x$, ou seja, evidencia a erro na modelagem que conduz ao erro na questão embora os conhecimentos do campo algébrico e dos demais sejam corretamente mobilizados nas fases subseqüentes.

Inicialmente, a interpretação errada do problema, que faz parte da 1ª etapa para resolução de um problema algébrico (Da Rocha Falcão, 1997) gera uma relação funcional errada. Embora a escrita algébrica seja coerente, levar em consideração que a tela também deve cercar o muro conduz a decompor os 20 metros de tela, que correspondem ao perímetro pretendido, como sendo $x + x + y + y = 20$.

Em conseqüência, a fórmula da área em função de x, apesar da manipulação algébrica correta:

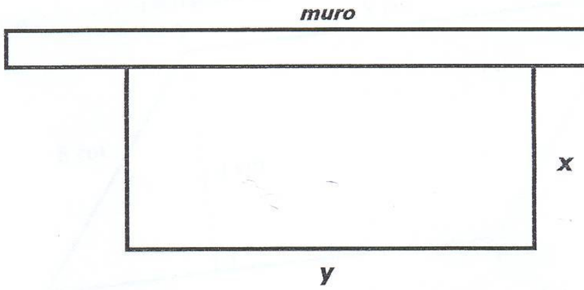
$$P = 2x + 2y = 20$$

Logo:

$y = 10 - x$, como $A = x.y$ então $A = x(10 - x) \Rightarrow A = 10x - x^2$, não produz uma resposta verdadeira, tanto por tentativas usando procedimento numérico ou calculando o ponto máximo da função num procedimento algébrico, o resultado produzido corresponde a um quadrado de lado 5, o que é, de certa forma coerente pois do ponto de vista geométrico, dado um perímetro fixo, o retângulo de maior área produzido com este perímetro é um quadrado.

O extrato do protocolo abaixo ilustra esta imbricação, vale salientar ainda que este aluno acerta todas as outras questões do testes 4.

FIG. 14 – Prot. 15 - Q4T4B$_1$



a) Expresse y em função de x. $y = 10 - x$
b) Determine a área A desse canteiro em função de x. $A = x(10 - x)$
c) Complete a tabela abaixo com alguns valores possíveis de x, de y e de A.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	5,5	7,5	3,5
y	9	8	7	6	5	4	3	2	1	4,5	2,5	6,5
A	9	16	21	24	25	24	21	16	9	24,75	18,75	22,75

d) Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão x e y, nesse caso.

X = 5 m
Y = 5 m
A = 25 m²

2
5,5
x4,5
275
+220
24,75

2
7,5
x2,5
375
+150
18,75

2
6,5
x3,5
325
195
22,75

Este erro de interpretação reflete no preenchimento da tabela, os alunos preenchem de forma que $x + y = 10$, tanto no procedimento numérico, quando o aluno vai direto para tabela para indicar a área máxima, como no algébrico – o aluno escreve a expressão algébrica.

Dentre os erros no preenchimento da tabela também foi possível indicar erros relacionadas à confusão entre área e perímetro

Destacamos ainda que 20 alunos, dos 27 que esboçaram alguma reposta para este item da questão, mobilizaram um procedimento numérico, porém, 17 utilizaram apenas valores inteiros e apenas 3 utilizaram decimais só até 0,5. Estes dados refletem a dificuldade de romper com o domínio numérico dos naturais e evidencia preferência por procedimentos numéricos em detrimento aos algébricos. Mas também evidenciam aspectos relacionados ao campo conceitual das funções, pois o aluno faz uma interpretação pontual das funções e não variacional no preenchimento da tabela, como ilustrado no extrato de protocolo abaixo.

.**FIG. 15 – Prot. 17 - Q4T4C$_1$**

a) Expresse y em função de x. $y = 20 - 2x$

b) Determine a área A desse canteiro em função de x. $x = \frac{A}{y}$

c) Complete a tabela abaixo com alguns valores possíveis de x, de y e de A.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	8,5	7,5	6,5
y	18	16	14	12	10	8	6	4	2	3	5	7
A	18	32	42	48	50	48	42	32	18	25,5	37,5	45,5

d) Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão x e y, nesse caso.

$50\ cm^2$ / $x = 5$, $y = 10$

Por outro lado, a opção pelo procedimento numérico parece mostrar que os sujeitos pesquisados não mobilizam nesta situação conhecimento funcional suficiente para calcular a área máxima através do cálculo do ponto de máximo da função:

FIG.17 – Prot. 18 - Q4T4B$_5$

y

$A = x \cdot y$

$A = x \cdot (20 - 2x)$

$A = 20x - 2x^2$

a) Expresse y em função de x. $y = 20 - 2x$

b) Determine a área A desse canteiro em função de x.

c) Complete a tabela abaixo com alguns valores possíveis de x, de y e de A.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1,5	2,5	3,5
y	18	16	14	12	10	8	6	4	2	17	15	13
A	18	32	42	48	50	48	42	32	18	25,5	37,5	45,5

d) Dona Rosa quer que o canteiro tenha a maior área possível usando os 20 metros de tela. Qual será essa área? Quanto medirão x e y, nesse caso.

$A = 20x - 2x^2$

$-2x^2 + 20x - A = 0$?

2.3. Questão 4 do teste 2 (Q4 –T2) - IMBRICAÇÕES NOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO SEM FIGURA

Baseada numa questão extraída de um livro didático[7] coloca em jogo as seguintes variáveis e seus respectivos valores: uso da fórmula para otimizar; tipo de figura – retângulo; figura ausente do enunciado; domínio numérico do dado é natural, mas o resultado é decimal.

[7] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática* (Ensino Médio). 1ª Edição. São Paulo: Ática, 2004. Volume 1, pág. 143.

Uma região retangular tem perímetro igual a 30 m. Quais devem ser as dimensões do retângulo para que a área seja máxima?

Possui um aspecto importante, que inclui conhecimentos dos vários campos conceituais: "*dado um perímetro fixo, o retângulo de maior área construído com este perímetro é um quadrado*". É necessário que o aluno caracterize geometricamente as figuras geométricas: retângulo e quadrado. Se o aluno dominar esta propriedade, pode ir diretamente à resposta da questão dividindo 30 em 4 partes iguais, já que o perímetro do quadrado corresponde à soma dos comprimentos dos quatro lados e os lados do quadrado são congruentes.

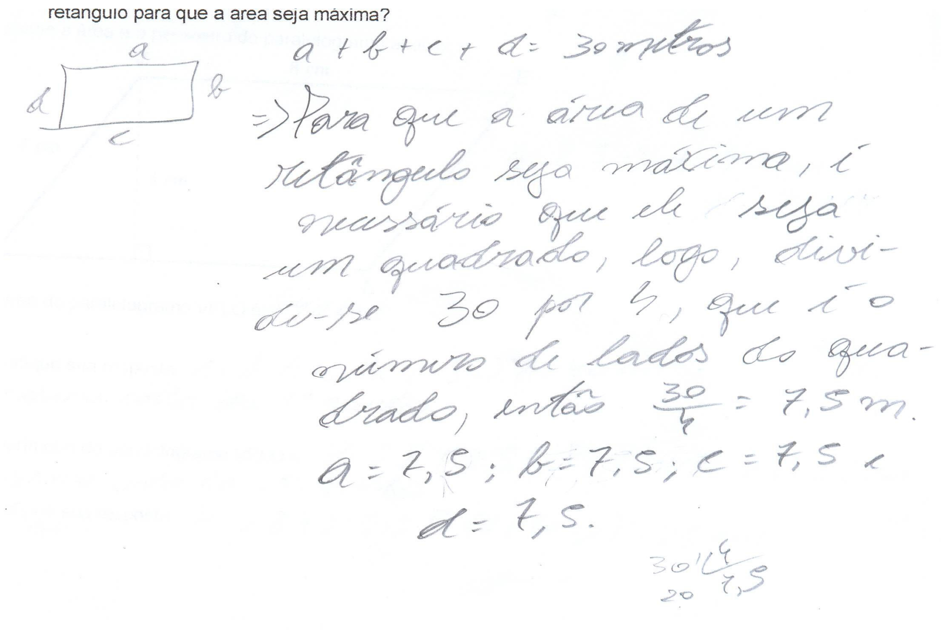
Neste problema, outro procedimento possível é a elaboração de uma tabela atribuindo valores numéricos às dimensões do retângulo e o respectivo cálculo da área. Neste procedimento, embora aparentemente estritamente numérico, o aluno precisa mobilizar conhecimentos relativos ao conceito de área e perímetro, ou seja, é necessário compreender que a soma das medidas dos quatro lados do retângulo é 30m, portanto o aluno precisa distribuir estes 30 m em partes iguais duas a duas, o que mobiliza um aspecto geométrico relacionado à propriedade do retângulo e também numérico, haja visto que, a divisão de 30 em partes iguais duas a duas resulta em um número racional provavelmente expresso de forma decimal. Feito isto, precisa mobilizar a fórmula da área do retângulo. A atribuição dos valores às variáveis também pressupõe a análise do domínio e do contradomínio da função área.

Esta foi uma das questões que apresentou maior grau de dificuldade, como foi evidenciado na análise quantitativa. Dos 54 alunos que responderam o teste 2, mais da metade (56%), ou seja, 30 alunos, não acertaram a questão. Algumas características específicas, como resultado pertencente ao domínio dos números racionais e o uso da fórmula para otimizar, parecem contribuir para esta dificuldade.

Identificamos nesta questão três tipos de procedimentos mobilizados pelos alunos que responderam a questão, em alguns casos conduzindo ao acerto e em outros ao erro. A diversidade de procedimentos mobilizados nesta questão também evidencia o papel das imbricações entre os campos conceituais nas situações que envolvem fórmulas de área. A seguir discutimos e ilustramos cada um destes procedimentos.

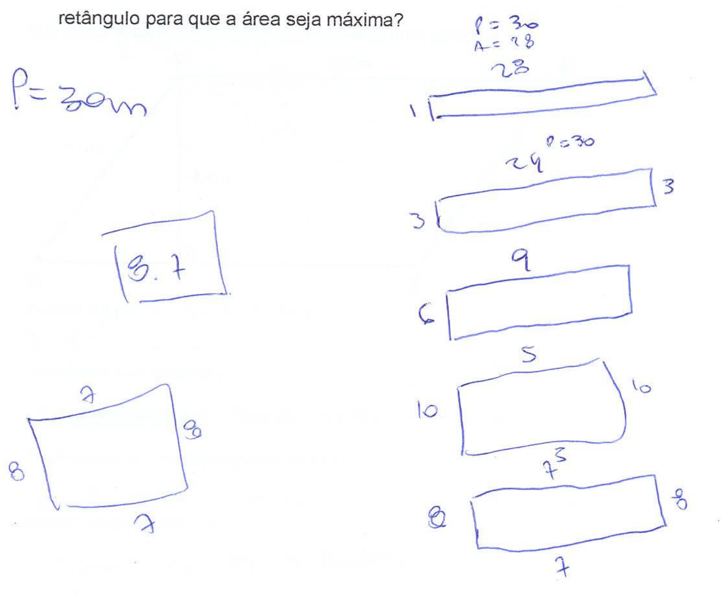
Procedimento geométrico – baseado no fato do retângulo de área máxima ser um quadrado. O protocolo abaixo ilustra uma resolução correta que tomou como ponto de partida esta característica do retângulo de área máxima. O aluno utiliza a representação simbólica da linguagem natural para explicitar os invariantes operatórios que mobilizou.

FIG.17 – Prot. 19 -Q4T2K$_1$



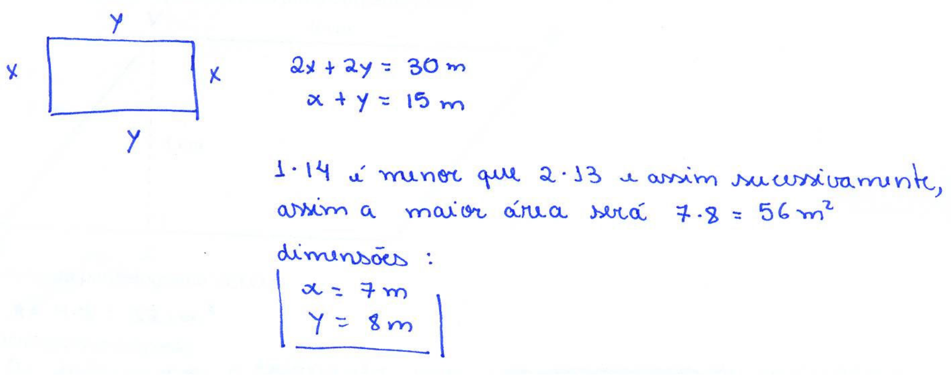
Procedimento numérico - procedimento caracterizado pela utilização de tentativa, porém, a maioria dos alunos se restringem ao domínio natural, o que possibilita um resultado apenas aproximado, como ilustramos no exemplo abaixo. O aluno mobiliza como representação simbólica figuras de vários retângulos.

FIG. 18 – Prot. 20 - Q4T2A$_1$



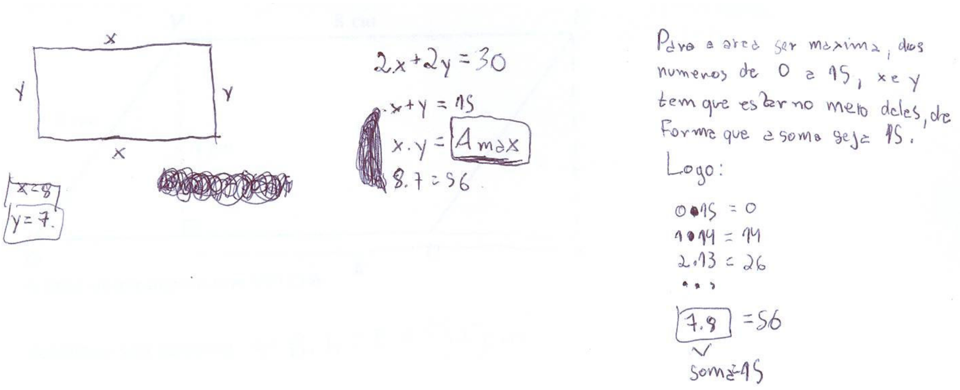
Ou escrevem as relações algébricas para o perímetro e para área da região retangular, mas optam pelas tentativas numéricas, como ilustra o protocolo abaixo. O aluno apesar de escrever corretamente a expressão que relaciona os comprimentos dos lados do retângulo e o perímetro dado, explicita o procedimento: como x + y tem que ser igual a 15, o aluno procura um par de números que somados dêem 15. A explicação do aluno parece ir no sentido de quando um comprimento aumenta o outro diminui, ou seja, conhecimento variacional, porém pontual, tomando valores numéricos específicos para as letras, que neste caso têm os seus valores atribuídos pelo aluno e não decorrentes de uma manipulação algébrica.

FIG.19 – Prot. 21 - Q4T2D$_1$



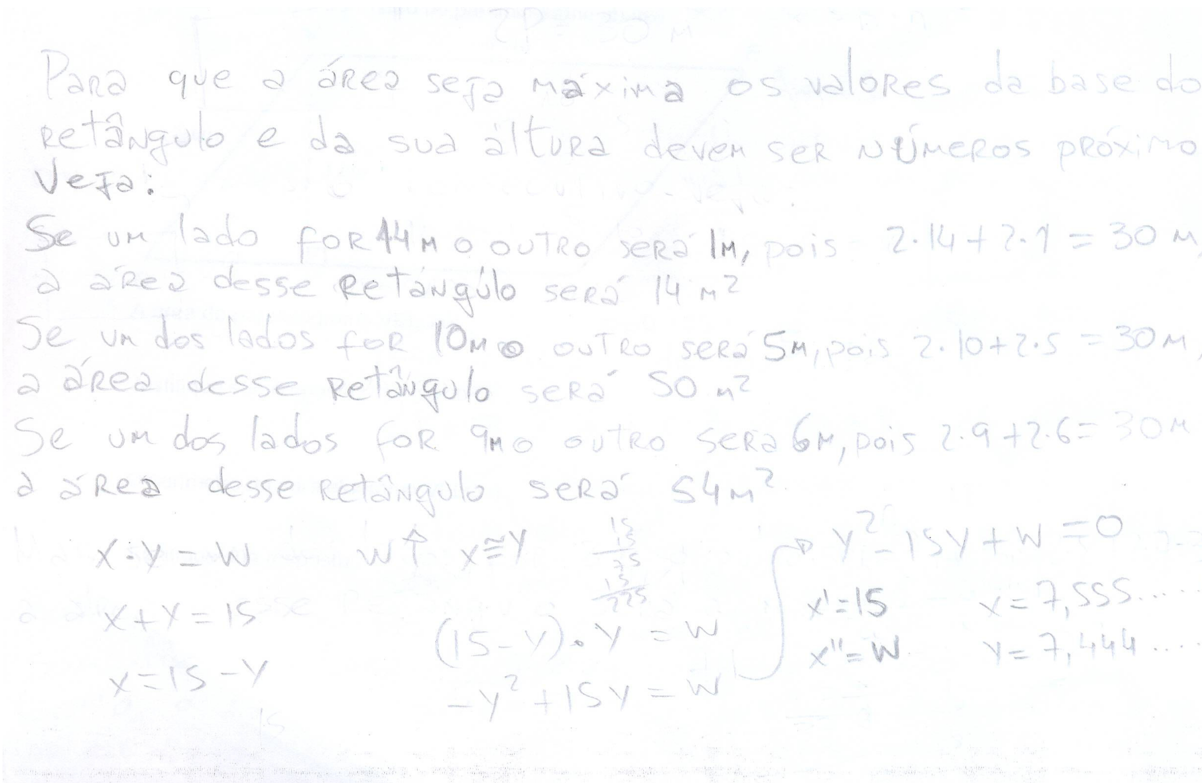
O protocolo abaixo também ilustra outro caso onde o aluno mobiliza a escrita algébrica corretamente, mas opta pelo procedimento de tentativas. No protocolo abaixo, diferentemente do primeiro o aluno explicita simbolicamente que a área máxima do retângulo é obtida multiplicando-se valores específicos para x e y. Estes valores podem ser obtidos se o aluno resolver corretamente o sistema de equações que gerou. Ele desiste desta opção e procura os valores por tentativas, sempre restritas ao domínio natural.

FIG. 20 – Prot. 22 - Q4T2E$_1$



Mesmo num caso onde o aluno efetua um procedimento algébrico corretamente, a dificuldade de lidar com a densidade dos números racionais permite apenas uma aproximação quase perfeita.

FIG. 21 – Prot. 23- Q4T2F$_5$



Além da diversidade de procedimentos foi possível identificar que os erros relacionados ao campo conceitual numérico refletem o evitamento de procedimentos algébricos e a restrição ao domínio dos números naturais nas tentativas.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

De modo geral, a análise dos testes possibilitou a identificação de procedimentos relacionados às imbricações e também a identificação de procedimentos e erros relacionados a cada campo conceitual especificamente, confirmando pesquisas anteriores e construindo novas categorias que irão contribuir para a elaboração de situações didáticas. Foi possível identificar imbricações entre os campos conceituais, por exemplo, na dificuldade de mobilizar conhecimentos importantes de dois campos conceituais: o das grandezas e o da álgebra, verificado pela ausência de respostas em determinadas questões; em justificativas apresentas para respostas em outras, sendo ora algébricas, apoiando-se numa expressão algébrica, ou numérica atribuindo valores às variáveis, ou ainda geométricas, tomando como referência propriedades da figura ou relacionadas às grandezas, apoiando-se nas grandezas associadas aos comprimentos dos lados ou a área da figura.

As questões de otimização mostraram imbricações relacionadas aos erros cometidos pelos alunos na interpretação da figura, relacionado ao campo geométrico; erros correspondentes à confusão área e perímetro ligado ao campo das grandezas; erro de manipulação algébrica, no campo algébrico; erro no procedimento numérico, campo numérico.

Neste trabalho, apesar de estudarmos um pequeno recorte do saber matemático: “fórmulas de área do retângulo, paralelogramo e triângulo”, abrimos com as questões que formulamos a possibilidade de construção de um modelo de estudo para outras temáticas sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais.

Ao pensarmos qual a contribuição, num aspecto mais amplo, desta pesquisa para o ensino aprendizagem da Matemática, ou como o professor pode usar essa construção teórica em sua prática, temos uma preocupação e um compromisso que ultrapassam os limites deste estudo, queremos, em longo prazo influenciar escolhas na organização curricular, nas abordagens adotadas pelos autores de livros didáticos; influenciar na elaboração de situações didáticas mais eficientes. Tudo isto por que acreditamos, que através de um ensino eficiente, que realmente cumpra seu papel na formação de cidadãos capazes de posicionar-se criticamente, de maneira responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, dando a ele condições para entrar e permanecer no mercado de trabalho ou dar continuidade aos estudos, só assim, as desigualdades sociais podem ser minimizadas. Quando isto acontecer, também esperamos que a violência, os preconceitos, e a miséria sejam minimizadas. É um sonho, sabemos, mas este trabalho representa um pequeno esforço nesta direção que é desejada por todos os homens e mulheres deste planeta.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALTAR, Paula Moreira. *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étuide de l'acquisition des relations entre lês longueurs et lesaires au collège.* Grenoble, 1996. Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.

DA ROCHA FALCÃO, Jorge Tarcísio. A Álgebra como Ferramenta de Representação e Resolução de Problemas. In: SCHLIEMANN, Analúcia Dias. *Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. 2.ed. Recife: Ed. UFPE,1997.

DOUADY, Regine; PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*. V. 20, n. 4. p. 387-424, 1989.

GARCIA, Francisco Fernández. Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Número 14, ano IV, outubro de 1997. Graó, Barcelona, 1997.

GERMI, Pierre Emmanuel. *Statut des lettres et notion de variable. Petit x número 45.* Pp. 59- 79. Grenoble, França: 1997.

HENRY, Michel. *Analyse Theorique de Situations Didactiques.* Simpósio Internacional de Educação Matemática. Recife: UFPE, 2006.

HENRY, Michel. *Le concept de Fonction Dans Lês Problémes de Rallye (Élèves de 12 à 15 ans).* IREM, Besançon (France). Université de France – Comte, 2005.

STRUIK, Dirk J. *História Concisa da Matemática.* Lisboa: Gradiva, 1989.

VERGNAUD, Gérard. La théorie des champs conceptuels. *Recherches em Didactique des Mathématiques* – RDM, v. 10, nº 2, 3. Grenoble, 1990. p. 133 – 170.